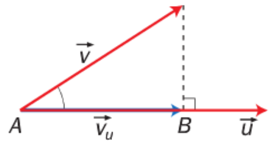
5. PRODUCTE ESCALAR

1. PRODUCTE ESCALAR

a. DEFINICIÓ: El producte escalar de dos vectors $\vec{u}\ i\ \vec{v}$, s'escriu com $\vec{u}\cdot\ \vec{v}$, i el seu resultat és un nombre real, que s'obté de multiplicar els seus mòduls pel cosinus de l'angle que formen:

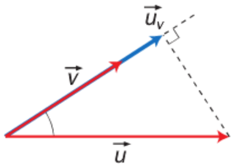
$$\vec{u}\cdot\ \vec{v} = |\vec{u}|\cdot|\vec{v}|.cos\alpha$$



$\vec{v_u}$ = proyección de $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$

b. INTERPRETACIÓ GEOMÈTRICA:

Equival al producte del mòdul de qualsevol d'ells per el mòdul de la projecció sobre ell.



$\vec{u_v}$ = proyección de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$

c. PROPIETATS:

- El producte escalar d'un vector per ell mateix és el quadrat del seu mòdul.$\vec{u}\cdot\vec{u} = |\vec{u}|^2$ (formen 0 graus)
- Propietat commutativa: $\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{u}$
- Propietat distributiva respecte de la suma: $\vec{w}(\vec{u}+\vec{v}) = \vec{w}\vec{u}+\vec{w}\vec{v}$
- Propietat respecte al producte per nombres reals:

$$(k\vec{v})\vec{u} = k(\vec{v}\cdot\vec{u})$$
$$\vec{v}(k\vec{u}) = k(\vec{v}\cdot\vec{u})$$

- Producte escalar de dos vectors no nuls és 0 sí o només sí, els dos vectors són perpendiculars.$\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$ (cosinus de 90º és 0)

d. EXPRESSIÓ EN COORDENADES:

En el sistema de referència canònic, el producte escalar de dos vectors, $\vec{v} = (a,b,c)$ i $\vec{u} = (a_1,b_1,c_1)$ és:

$$\vec{u}\cdot\ \vec{v} = a_1\cdot a + b_1\cdot b + c_1\cdot c$$

2. APLICACIONS

a. ANGLE ENTRE DOS VECTORS:

$cos\alpha = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}$ *Sempre agafem l'angle més petit.

b. CÀLCUL DE VECTORS PERPENDICULARS: $\vec{u}\cdot\ \vec{v} = 0$

c. VECTOR PERPENDICULAR A UN PLA:Un vector és perpendicular al pla quan és perpendicular a qualsevol vector compres al pla.

3. PERPENDICULARITAT ENTRE RECTA I PLA

Una recta i un pla són ortogonals quan el vector director de la recta és perpendicular al pla.

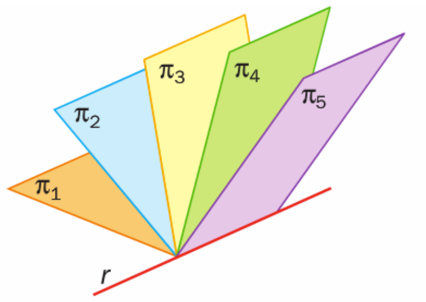
Exemples:

RECTA PERPENDICULAR A UN PLA

PLA PERPENDICULAR A UNA RECTA

4. FEIXOS DE PLANS

El **feix de plans secants** a una recta r és el conjunt de tots els plans que contenen a aquesta recta.



Expressem la recta r com a intersecció de dos plans:

$$r: \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A'_1x + B'_1y + C'_1z + D'_1 = 0 \end{cases}$$

Qualsevol pla: $\pi_3: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ que formi part del feix de plans no canvia la solució del sistema d'equacions. Així l'equació del nou pla és combinació lineal de les altres dues.

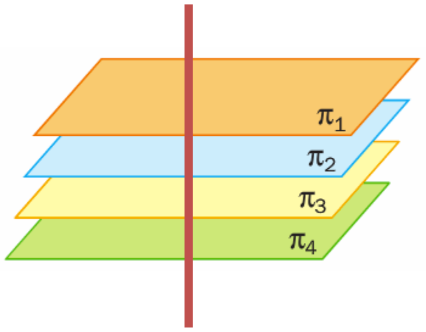
$$\pi_3: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = \mu(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \lambda(A'_1x + B'_1y + C'_1z + D'_1)$$

En la pràctica considerarem que l'equació del feix de plans és:

$$(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \lambda(A'_1x + B'_1y + C'_1z + D'_1) = 0$$

El **feix de plans perpendiculars** a una recta r és el conjunt de tots els plans que són perpendiculars a aquesta recta:
El vector director de la recta $\vec{v} = (a, b, c)$ és el vector normal de qualsevol vector del pla.

$$\pi_3 : ax + by + cz + D = 0$$



Exemple:

5. ANGLES A L'ESPAI

a. ANGLE ENTRE DOS RECTES:

$$\alpha = arccos \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$$

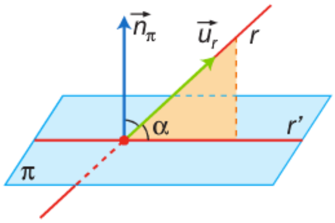
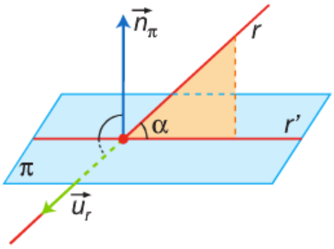


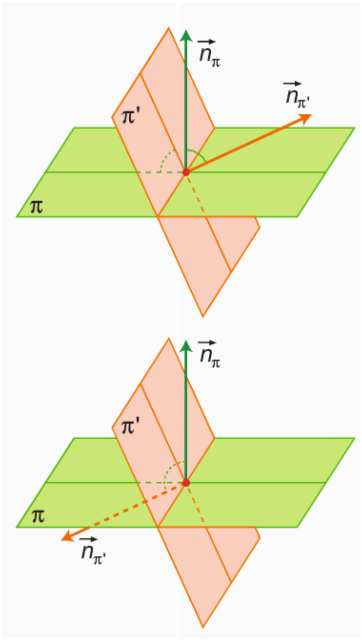
Figura 1

b. ANGLE ENTRE RECTA I PLA: vector director de la recta i vector normal al pla.

$$\alpha = 90^0 - arccos \frac{|\vec{u} \cdot \vec{n}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{n}|}$$



Exemple:



c. Angle entre dos plans:

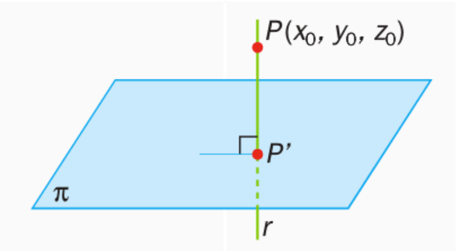
$$\alpha = arccos \left(\frac{|\vec{n_1} \cdot \vec{n_2}|}{|\vec{n_1}| \cdot |\vec{n_2}|} \right)$$

Exemple:

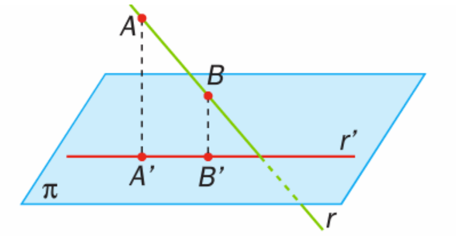
6. PROJECCIONS ORTOGONALS:

a. La projecció ortogonal d'un punt P sobre una recta r és un altre punt P' que pertany a la recta, i tal que el vector $\overrightarrow{PP'}$ és perpendicular al vector director de la recta.

b. La projecció ortogonal d'un punt P sobre un pla π és un punt P' que pertany al pla, i tal que el vector $\overrightarrow{PP'}$ és perpendicular al pla.



c. La projecció ortogonal d'una recta r sobre un pla π és una recta s que està compresa al pla, i tal que el pla π' que conté a les dos rectes és perpendicular al pla π.



7. PUNTS SIMÈTRICS

a. Punt simètric a un punt P respecte un altre punt Q.
Exemple:

b. Punt simètric a un punt P respecte d'una recta r.
Exemple:

c. Punt simètric a un punt P respecte un pla π.

Exemple:

Exemple:

8. DISTÀNCIES

a. DISTÀNCIA ENTRE DOS PUNTS:

La distància entre dos punts és el mòdul del vector que te per extrems els punts donats.

$$d(A,B) = |\vec{v}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Exemple:

b. DISTÀNCIA D'UN PUNT A UNA RECTA:

Distància entre el punt P i la seva projecció ortogonal sobre la recta r.

*veure projecció ortogonal

Exemple:

c. DISTÀNCIA D'UN PUNT A UN PLA:

Distància entre el punt P i la seva projecció sobre el pla π.

$$d(P,\pi) = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Exemple:

d. DISTÀNCIA ENTRE DOS PLANS:

- ✓ Si dos plans són coincidents o es tallen, la distància és cero.
- ✓ Si els plans són paral·lels, la distància entre ambdós és igual a la distància entre qualsevol punt P d'un dels plans a l'altre.

Exemple:

e. DISTÀNCIA ENTRE UNA RECTA I UN PLA:

- ✓ Si la recta i el pla tenen algun punt en comú, la distància és cero.
- ✓ Si la recta i el pla són paral·lels, la distància entre ambdós és igual a la distància entre qualsevol punt P de la **recta** i el pla π.Qualsevol punt del pla NO!!

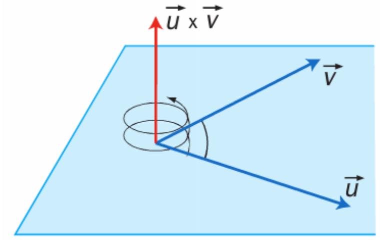
Exemple:

f. DISTÀNCIA ENTRE DUES RECTES:

- ✓ Si les rectes són **secants o coincidents**, la distància entre ambdues rectes és cero.
- ✓ Si les rectes són **paral·leles**, la distància entre elles és igual a la distància entre qualsevol punt d'una a l'altra.
- ✓ Si les rectes **es creuen**, la distància entre elles és igual a la distància d'una al pla paral·lel a ella que conté a l'altra recta.

Exemples:

6. PRODUCTE VECTORIAL I MIXT



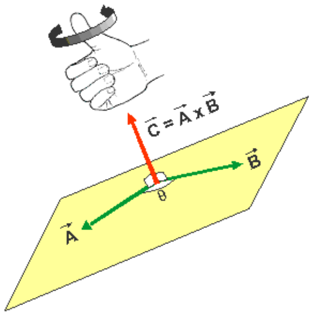
1. PRODUCTE VECTORIAL

a. DEFINICIÓ: el producte vectorial de dos vectors, $\vec{u}\ i\ \vec{v}$, és un altre vector $\vec{u}\ x\ \vec{v}$ que conté els següents elements:

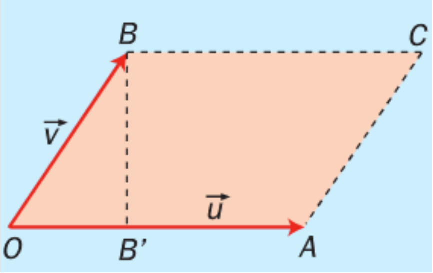
i. Mòdul: $|\vec{u}\ x\ \vec{v}| = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot sin\alpha$, sent α el menor angle entre els vectors $\vec{u}\ i\ \vec{v}$.

ii. Direcció: la perpendicular de qualsevol pla generat per ambdós vectors, $\vec{u}\ i\ \vec{v}$.

iii. Sentit: regla del llevataps.



b. INTERPRETACIÓ GEOMÈTRICA: El mòdul del producte vectorial dels dos vectors $\vec{u}\ i\ \vec{v}$, és igual a l'àrea del paral·lelogram que defineixen ambdós vectors.



c. PROPIETATS:

i. El producte vectorial d'un vector per ell mateix és cero:$|\vec{u}\ x\ \vec{u}| = 0$

ii. Propietat anticonmutativa:$\vec{u}\ x\ \vec{v} = -\vec{v}\ x\ \vec{u}$→ sentit contrari (oposats)

iii. Propietat distributiva respecte de la suma:$\vec{u}\ x\ (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u}\ x\ \vec{v} + \vec{u}\ x\ \vec{w}$

iv. Propietat respecte al producte per els nombres reals:$(k\vec{u}) x\ \vec{v} = k(\vec{u}\ x\ \vec{v})$

v. EL producte vectorial de dos vectors no nuls és el vector nul si, i només sí, els vectors són paral·lels:$|\vec{u}\ x\ \vec{v}| = 0$

d. EXPRESSIÓ EN COORDENADES: En el sistema de referència canònic, el producte vectorial de dos vectors, $\vec{v} = (a, b, c)$ i $\vec{u} = (a_1, b_1, c_1)$ és:

$$\vec{u}\ x\ \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \end{vmatrix} = \vec{\imath}\begin{vmatrix} b & c \\ b_1 & c_1 \end{vmatrix} + \vec{\jmath}\begin{vmatrix} c & a \\ c_1 & a_1 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}$$

$$\vec{u}\ x\ \vec{v} = \begin{vmatrix} b & c \\ b_1 & c_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} c & a \\ c_1 & a_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}$$

2. APLICACIONS:

a. VECTOR PERPENDICULAR A ALTRES DOS VECTORS: Si $\vec{u}\ i\ \vec{v}$ són dos vectors linealment independents i diferents de cero, el seu producte vectorial és un vector perpendicular a ambdós.

b. VECTOR DIRECTOR D'UNA RECTA EXPRESSADA PER DOS PLANS:

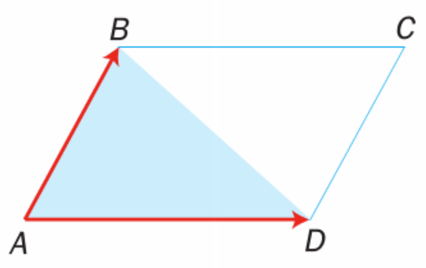
Donada una recta determinada per dos plans $\pi\ i\ \pi'$: $r: \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$

Si $\overrightarrow{n_1}(A_1, B_1, C_1)$ i $\overrightarrow{n_2}(A_2, B_2, C_2)$ són els vectors perpendiculars a cadascun dels dos plans:

La recta r està continguda en $\pi \rightarrow \overrightarrow{v_r} \perp \overrightarrow{n_1}$ i en $\pi' \rightarrow \overrightarrow{v_r} \perp \overrightarrow{n_2}$, per tant, tenim: $\overrightarrow{v_r} = \overrightarrow{n_1}\ x\ \overrightarrow{n_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_1 & B_1 & C_1 \end{vmatrix}$

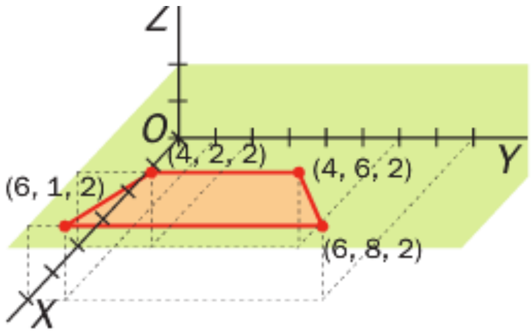
3. ÀREES DE FIGURES PLANES A L'ESPAI

a. ÀREA PARAL·LELOGRAM: L'àrea d'un paral·lelogram ABCD és el mòdul del producte vectorial dels vectors $\overrightarrow{AB}\ x\ \overrightarrow{AD}$.



$$Àrea = |\overrightarrow{AB}\ x\ \overrightarrow{AD}|$$

Exemple:



b. ÀREA TRIANGLE: L'àrea d'un triangle de vèrtex ABC la calcularem:

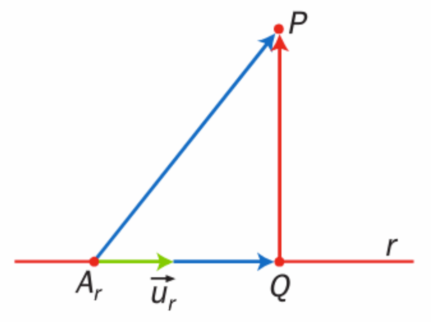
$$Àrea = \frac{|\overrightarrow{AB}\ x\ \overrightarrow{AD}|}{2}$$

4. DISTÀNCIA D'UN PUNT A UNA RECTA

La distància d'un punt P a una recta r es pot calcular:

$$d(P,r) = \frac{\left|\vec{v_r}\ x\ \overrightarrow{AP}\right|}{|\vec{v_r}|}$$

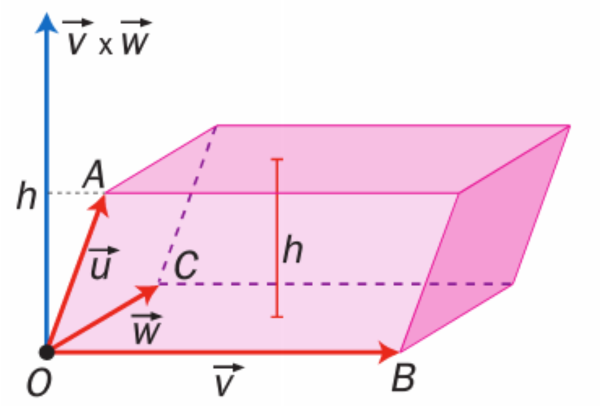
sent $\vec{v_r}$, el vector director de la recta i A un punt qualsevol de la recta.
També ho podem aplicar a la distància entre dues rectes paral·leles.
*Imagineu el paral·lelogram i PQ correspon a l'altura.



5. PRODUCTE MIXT

a. DEFINICIÓ: El producte mixt de tres vectors, $\vec{u}, \vec{v}\ i\ \vec{w}$, que s'escriu com: $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$, és el número que s'obté al calcular el producte escalar del primer vector per el producte vectorial dels altres dos.

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \vec{u} \cdot (\vec{v}\ x\ \vec{w})$$



b. INTERPRETACIÓ GEOMÈTRICA: el valor absolut del producte mixt de tres vectors és igual al volum del paral·lelepípede definit per aquests.

c. PROPIETATS:

i. El producte mixt canvia de signe si es permuten dos dels vectors: $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = -[\vec{u}, \vec{w}, \vec{v}] = -[\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}] = -[\vec{w}, \vec{v}, \vec{u}]$

ii. El producte mixt no varia si es permuten els vectors cíclicament: $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = [\vec{w}, \vec{u}, \vec{v}] = [\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}]$

iii. Propietat distributiva respecte de la suma.

iv. Propietat respecte al producte per nombres reals.

v. El producte mixt de tres vectors no nuls és cero si, i només sí, els vectors són linealment dependents.

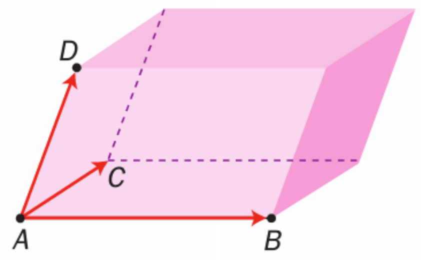
d. EXPRESSIÓ EN COORDENADES: Sent els vectors $\vec{u} = (a_1, b_1, c_1)$, $\vec{v} = (a_2, b_2, c_2)$ i $\vec{w} = (a_3, b_3, c_3)$

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

6. VOLUMS DE COSSOS GEOMÈTRICS

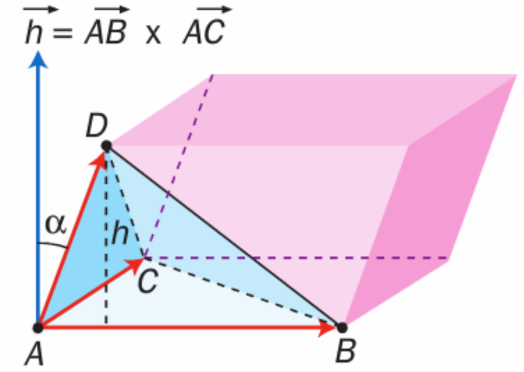
a. VOLUM PARAL·LELEPÍPEDE:

$$Volum = \left|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}]\right|$$



b. VOLUM TETRAEDRE:

$$Volum = \frac{\left|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}]\right|}{6}$$



7. DISTÀNCIA ENTRE DOS RECTES QUE ES CREUEN

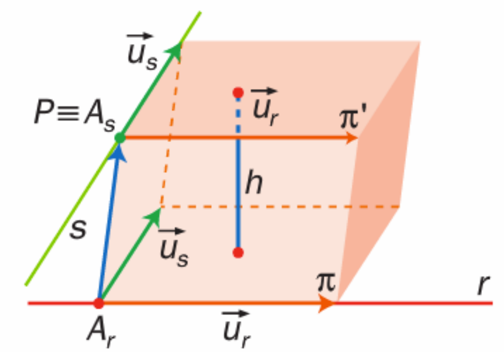
$$d(r,s) = \frac{\left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}\right]\right|}{\left|\overrightarrow{v_r}\ x\ \overrightarrow{v_s}\right|}$$

$\overrightarrow{v_r}$ *vector director recta r*

$\overrightarrow{v_s}$ *vector director recta s*

A un punt de la recta r

B un punt de la recta s



8. LLOCS GEOMÈTRICS

Un lloc geomètric és el conjunt de tots els punts de l'espai que compleixen una determinada propietat geomètrica.

Exemples: